SCIENZE MATEMATICHE

La visione kleiniana della geometria

Nel 1872 F. Klein pronuncia ad Erlangen la sua dissertazione che rappresenta uno dei momenti più importanti della «crisi» del pensiero geometrico.
L'Autore dell'articolo che di seguito proponiamo offre alla riflessione del lettore, con indubbio rigore e chiarezza, le questioni più salienti e significative del problema.

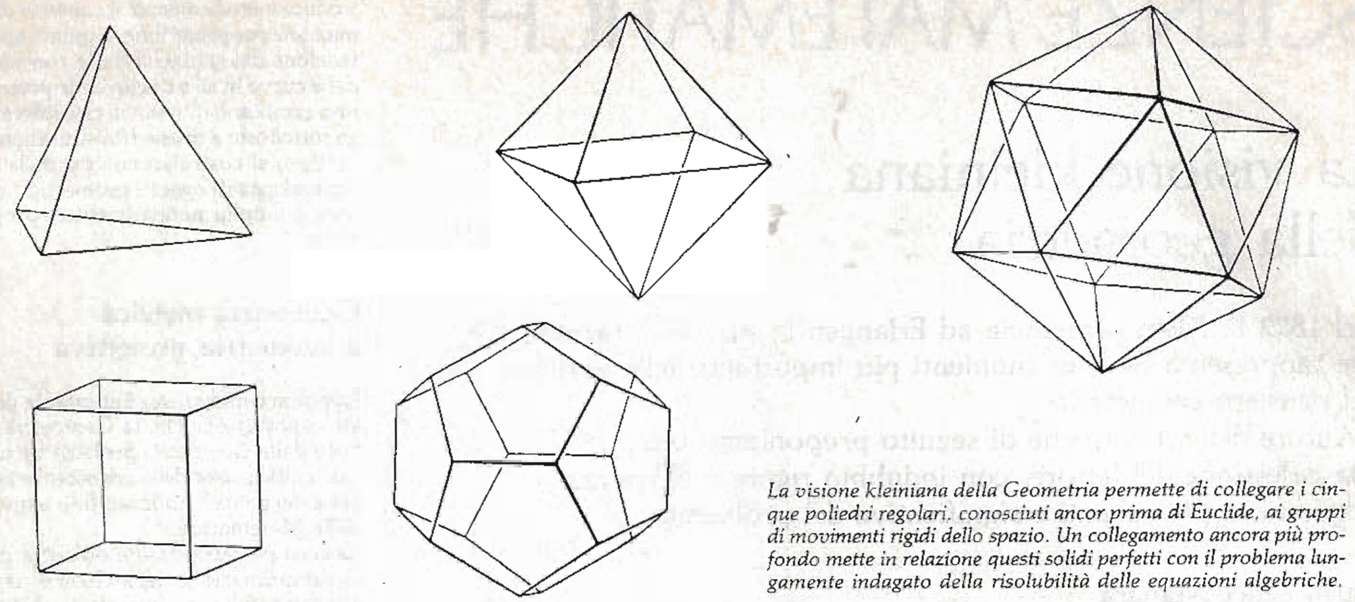
Carlo Felice Manara

Vorremmo presentare qui la visione kleiniana della Geometria come uno dei momenti della crisi che questa scienza ha vissuto nel secolo XIX; forse uno tra i momenti più importanti, perché costituisce in certo modo un punto di arrivo e di sintesi degli sviluppi che lo precedono e a sua volta rappresenta un punto di partenza per ulteriori fecondi sviluppi.
Prima di entrare in argomento vorremmo precisare che utilizzeremo, qui e nel seguito, il termine «crisi» in una accezione che è diversa da quella in cui viene preso abitualmente: infatti si parla spesso di «crisi» per indicare una situazione nella quale una certa visione delle cose viene a mancare, una certa sistemazione di idee o di teorie viene a cadere. Noi invece utilizzeremo qui il termine crisi con riferimento alla sua origine etimologica, che accosta il suo significato a quello del termine «giudizio»; in questo senso quindi una crisi rappresenta un giudizio su una sistemazione o su una teoria, giudizio che non necessariamente è negativo, ma che ha la sua origine in una analisi approfondita dei punti di partenza e degli sviluppi deduttivi che hanno condotto ad una certa sistemazione.
In questo senso intendiamo dire che la Geometria nel secolo XIX ha vissuto una crisi; perché gli sviluppi di questa scienza hanno dato origine ad una analisi dei suoi fondamenti e questi sono stati messi in evidenza, in modo che gli scienziati ed i ricercatori potessero rendersi conto esplicitamente delle proposizioni adottate come primitive; proposizioni che nell'atteggiamento precedente erano considerate come «evidenti».
Noi pensiamo quindi che la crisi della Geometria nel secolo XIX sia stato un episodio di maturazione e di progresso; progresso che ha portato non soltanto la Geometria, ma anche tutta la Matematica ad assumere l'aspetto che queste scienze hanno preso nella prima metà del nostro secolo, prima dell'epoca in cui l'avvento dei grandi mezzi di calcolo e di elaborazione dell'informazione abbia costretto la Matematica ad accettare vitalmente la sfida del progresso tecnologico.
L'episodio a cui ci riferiamo si è realizzato storicamente e concretamente con la celebre dissertazione che Felix Klein fece ad Erlangen, in occasione dell'inizio della sua attività accademica presso quella celebre Università tedesca.
Tale dissertazione, che F. Klein pronunciò nel 1872, in occasione del suo accoglimento nella Facoltà filosofica e nel Senato dell'Università di Erlangen, ha come titolo tedesco: «Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen» ed è stata tradotta in italiano da Gino Fano col titolo «Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti» (Annali di Matematica, 1891).
L'occasione di questa opera sintetizzante è stata porta a Klein dallo sviluppo imponente delle ricerche geometriche nella prima metà del secolo XIX; in modo più particolare vorremmo mettere in evidenza l'insieme di dottrine che viene abitualmente chiamata Geometria proiettiva.
È noto che nella nascita di questa branca della Geometria si possono intravvedere le influenze di due geniali matematici: Vittorio Poncelet e K. K. von Staudt; e che ognuno di questi ha contribuito in modo originale alla costruzione di questo imponente ed elegante capitolo della Matematica del secolo XIX.
Invero la genialità di Poncelet si esplica soprattutto nella sua capacità inventiva, nella adozione di quel metodo che viene spesso richiamato con il suo nome, e che consiste nella lettura, in forma generale, delle proprietà delle figure considerate dalla Geometria classica.
La genialità di Staudt si manifesta in modo particolare nella costruzione rigorosa di questa nuova dottrina, cercando di evitare il ricorso agli strumenti della Geometria classica, ed impostando definizioni e dimostrazioni soltanto su concetti di appartenenza o — secondo il suo modo di esprimersi — di posizione; ed infatti la sua opera fondamentale ha come titolo «Geometrie der Lage», che potrebbe essere tradotto liberamente con «Geometria di posizione» (esiste una traduzione italiana di quest'opera dovuta a M. Pieri e che ha appunto questo titolo).
L'opera di questi geniali matematici, e gli sviluppi che ne conseguirono gettarono una nuova luce sui teoremi noti, ed impostarono tutta una visione di nuove strade di ricerca; per dare un esempio, consideriamo il caso delle sezioni del cono rotondo; tali curve, com'è noto, furono studiate fino dall'antichità dalla Geometria greca, e sono abitualmente chiamate «sezioni coniche» o anche, brevemente, «coniche».
Orbene, con la impostazione proiettiva, queste curve vengono viste non più come ottenute secando il cono, ma come risultati di una operazione di proiezione della circonferenza da un punto, fuori del suo piano, su un altro piano.
Questo cambiamento del punto di vista introduce metodicamente il concetto di trasformazione per proiezione, e quindi sposta l'attenzione dei geometri dalla considerazione delle curve in sé a quella delle proprietà che non cambiano quando la circonferenza venga sottoposta a queste trasformazioni di nuovo tipo; si costruiscono così delle classi di equivalenza di oggetti geometrici, e la Geometria amplia notevolmente i propri orizzonti.

Geometria metrica e geometria proiettiva

La prima conseguenza importante della nuova impostazione che la Geometria ha ricevuto dalla Geometria proiettiva è una radicale unificazione delle conoscenze geometriche e dei metodi utilizzati fino a quel tempo dalla Matematica.
La cosa potrebbe essere descritta parlando di subordinazione della Geometria metrica alla proiettiva: in particolare nella dissertazione di Klein vengono presentate esplicitamente le dimostrazioni che riguardano questo fatto: ogni teorema di Geometria elementare metrica classica può essere formulato come un teorema di Geometria proiettiva, che mette in evidenza i rapporti di una data figura con certe figure privilegiate del piano o dello spazio, figure che vengono abitualmente indicate come l'assoluto del piano o dello spazio. Un caso particolare di questo risultato è per esempio la celebre formula detta «di Laguerre», la quale esprime l'angolo (nel senso elementare del termine) di due rette come funzione del birapporto della quaterna di rette costituita dalle rette considerate e da due rette particolari, e precisamente quelle che uniscono il centro del fascio con due punti impropri particolari: i punti ciclici del piano, che costituiscono l'assoluto del piano stesso.
Per la completezza, e per avere una visione precisa della situazione della scienza all'epoca in cui si verificavano questi eventi occorre ricordare che la formulazione delle proprietà della Geometria elementare in termini di Geometria proiettiva è resa possibile dalla introduzione dei punti a coordinate complesse; il che richiede ovviamente che la Geometria si sia appropriata in modo radicale dei metodi della Geometria analitica, e che la teoria dei numeri complessi abbia acquisito

Felix Klein (1849-1925).



La visione kleiniana della Geometria permette di collegare i cinque poliedri regolari, conosciuti ancor prima di Euclide, ai gruppi di movimenti rigidi dello spazio. Un collegamento ancora più profondo mette in relazione questi solidi perfetti con il problema lungamente indagato della risolubilità delle equazioni algebriche.

una sua autonomia; il che è avvenuto, come è noto, per opera soprattutto di K. F. Gauss e di A. Cauchy.
Va tuttavia osservato il fatto che K. K. von Staudt aveva cercato, con risultati positivi, di evitare le critiche di formalismo e di astrazione che si potrebbero facilmente elevare ad impostazioni di questo tipo, ed aveva dato, con il rigore e la capacità inventiva che lo distinguevano, le interpretazioni reali di tutti gli enti della teoria delle funzioni di variabile complessa che venivano chiamati in causa negli enunciati che puntualizzavano la subordinazione della Geometria metrica alla proiettiva.
Infatti nella sua opera «Beiträge zur Geometrie der Lage» Staudt dà le costruzioni concrete, nel campo reale, che permettono di rendere effettive le operazioni che coinvolgono degli oggetti geometrici la cui esistenza — apparentemente — può essere enunciata soltanto facendo ricorso alle convenzioni della Geometria analitica, ed all'impiego dei numeri complessi. Pertanto la invenzione della Geometria proiettiva si presentava come un ampliamento fecondissimo degli studi geometrici, ampliamento che tuttavia rimaneva in continuità con le ricerche e le conquiste dei secoli precedenti. Va ricordato inoltre che i progressi dell'Algebra e dell'Analisi matematica permettevano anche la precisazione di certi concetti che erano rimasti imprecisi e implicitamente accettati prima di quel tempo. In particolare le ricerche di E. Galois sulla teoria delle equazioni algebriche permettevano anche di dare una svolta decisiva a certi problemi classici che la Geometria aveva investigato per secoli; vogliamo dire — per esempio — dei problemi che nella storia della scienza vengono richiamati come della duplicazione del cubo, della trisezione dell'angolo, della quadratura del cerchio. In questi problemi l'Analisi matematica e l'Algebra della seconda metà del secolo XIX hanno dato delle risposte che hanno segnato delle svolte radicali nello sviluppo della Matematica.

L'Algebra nell'evoluzione del pensiero geometrico

Abbiamo detto che la invenzione della Geometria proiettiva ha dato un impulso importantissimo all'ampliamento dell'orizzonte della Geometria e della Matematica in generale. Abbiamo anche accennato all'apporto dei progressi dell'Algebra a questi movimenti di ampliamento e progresso. Qui vogliamo volgere la nostra attenzione in particolare su uno dei capitoli dell'Algebra, capitolo che è diventato un classico di questa branca della Matematica: vogliamo dire della teoria dei gruppi.
Occorre ricordare che questa teoria è stata presa in considerazione dal genio di Evaristo Galois, in relazione al problema della soluzione algebrica delle equazioni algebriche.
La teoria dei gruppi era stata studiata da A. Cauchy, in particolare per i suoi collegamenti con i gruppi finiti di permutazioni tra un numero finito di elementi. È interessante osservare come questi studi abbiano contribuito alla evoluzione della concezione della Matematica: invero fino alla metà del secolo scorso si potrebbe dire che l'Algebra era una dottrina qualificata e specificata dai contenuti, e precisamente dalle particolari proprietà delle operazioni sugli insiemi numerici conosciuti ed utilizzati a quei tempi: i numeri reali ed i numeri complessi.
Si potrebbe osservare che le operazioni su questi enti, in particolare i prodotti e le somme, sono tipicamente commutative; pertanto la introduzione sulla scena di certe strutture algebriche nelle quali le operazioni di composizione interna non sono in generale commutative doveva costituire una notevole novità. Va ricordato — per completezza — che già Eulero, alla fine del secolo XVIII, aveva portato a termine l'analisi dei movimenti finiti della sfera su se stessa; ed aveva rilevato che l'applicazione successiva di due operazioni (quello che noi oggi chiamiamo il «prodotto» di due operazioni) dipende dall'ordine nel quale le due operazioni sono applicate; l'aspetto essenzialmente nuovo delle analisi che seguirono di un secolo circa quelle di Eulero consiste nell'aver codificato queste proprietà delle operazioni in proprietà formali sintattiche dei simboli che le rappresentano.
Veniva così maturando la concezione dello studio delle proprietà di certe operazioni; e veniva maturando anche un fondamentale ampliamento della concezione dell'oggetto della Matematica. Invero questo oggetto veniva pensato definibile come «la quantità» oppure «l'ente quantificabile» o descritto con altre frasi, altrettanto piene di echi e di richiami che vuote di contenuti precisabili in modo rigoroso.
Da questa visione della Matematica come di una scienza qualificata dai suoi contenuti, questi a loro volta lasciati ad una intuizione non meglio determinata, si assiste ad una evoluzione nella quale la Matematica si presenta sempre di più come scienza di strutture formali. Così, per fare un esempio, nella concezione moderna, l'Algebra non viene più determinata dalla necessità di dominare i contenuti dei numeri reali o complessi, ma viene studiata a sé come dottrina che si interessa di certe operazioni astratte e della loro sintassi.
Le influenze di questa nuova visione sulla Geometria potrebbero essere brevemente descritte dicendo che l'attenzione si sposta dalle figure, prese singolarmente, alle trasformazioni e quindi alle classi di equivalenza delle figure, considerando come equivalenti due figure quando sono trasformate l'una nell'altra da una operazione di un certo gruppo. In forma un poco diversa, ma sostanzialmente equivalente, si potrebbe dire che l'attenzione si sposta dai singoli oggetti alle classi di oggetti, e da queste alle manipolazioni che noi eseguiamo sugli oggetti stessi.
Si potrebbe osservare che questa impostazione, apparentemente nuova, costituisca in certo modo una evoluzione naturale della linea di sviluppo della Geometria classica tradizionale.
Infatti noi pensiamo che una analisi, storica e logica, della Geometria classica debba tener conto non soltanto degli enunciati espliciti, ma anche, e direi soprattutto, delle cose che gli antichi consideravano come naturali, implicitamente e tacitamente ammesse. Perché forse proprio queste fanno comprendere quale sia il procedimento di astrazione che essi adottavano.
Ora la lettura delle opere di Euclide e degli altri grandi geometri della cultura greca (Archimede ed Apollonio, tra i massimi) mostra che per la Geometria greca la costruzione di una figura elementare congruente ad una data era una operazione la cui eseguibilità e la cui validità era tacitamente ammessa.
È stato osservato che Euclide non nomina il compasso e la riga; questi strumenti sono stati classificati come «elementari» dalla critica del secolo XIX; ma effettivamente la nozione di «cose uguali» è nominata in Euclide ed essa — come si evince dal contesto —

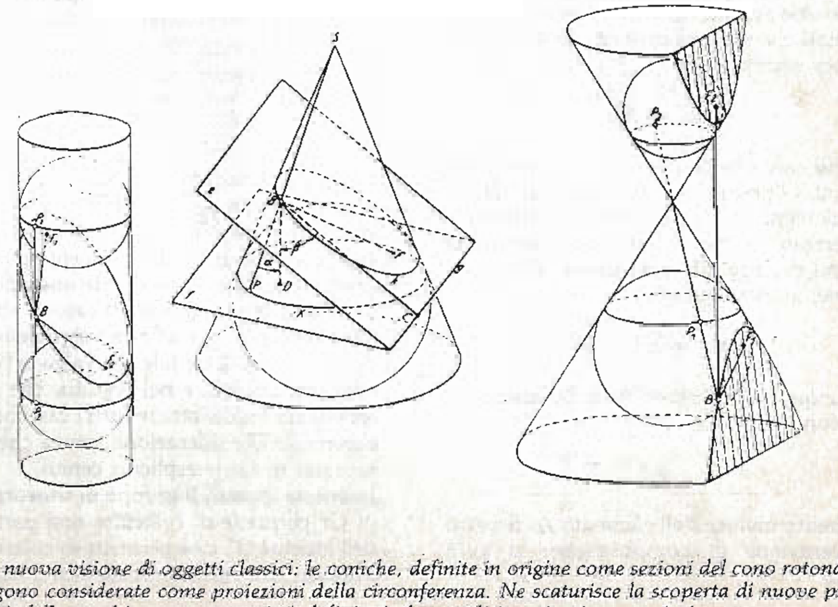
viene realizzata dal trasporto rigido delle figure. In altri termini, si potrebbe dire che la Geometria classica si fonda sulla nozione, ritenuta intuitiva, di figura rigida e di trasporto rigido delle figure geometriche.

L'astrazione nella visione kleiniana

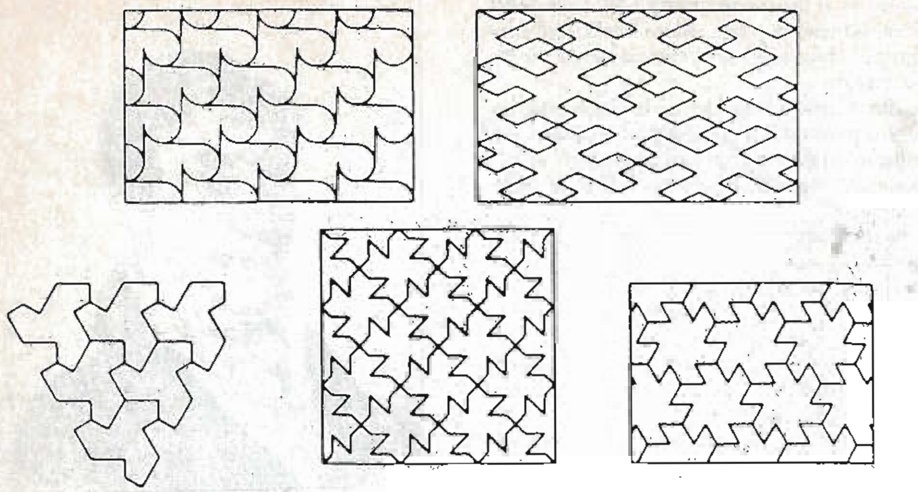
Quando si imposta la visione kleiniana della Geometria dal punto di vista epistemologico, si potrebbero svolgere le considerazioni seguenti, che vogliono essere soltanto delle puntualizzazioni di constatazioni banali, senza alcuna pretesa di diventare delle enunciazioni aventi carattere generale e metodologico.
Rimanendo a questo livello, ed in questo ordine di idee, pare a noi che si possa dire che la procedura tipica della scienza è quella di astrazione; invece anche nella sapienza medievale esisteva la sentenza: «De singularibus non datur scientia»; cioè la conoscenza scientifica, nel senso che vorremmo dare a questo termine, non può esistere della cosa singola, dell'ente singolare in quanto tale. Dicendo le cose in altro modo, si potrebbe esprimersi dicendo che la scienza, nella sua ricerca della certezza e della generalità deve necessariamente rinunciare ad indagare sulle cose singole, in quelle loro particolarità che le individuano, e costruire invece delle classi di oggetti, che essa considera come equivalenti ai fini della conoscenza.
Questa operazione potrebbe essere chiamata «astrazione» e viene fatta in modo che si potrebbe dire automatico ed incosciente, e comunque implicito in ogni trattazione scientifica almeno nel suo stadio iniziale.
Senza volere addentrarci in discussioni di carattere filosofico, vorremmo tuttavia osservare, di passaggio, quanto vi sia di intuitivo ed arbitrario, ed in definitiva di irrazionale, nella scelta degli aspetti della realtà dei quali soltanto lo scienziato decide di tener conto, trascurando gli altri, quando costruisce una determinata teoria. Invero questo procedimento di astrazione è inevitabile, in forza delle ragioni che sono state dette sopra, affermando che non è possibile tener conto di tutti gli aspetti della realtà concreta e singola; ma ciò non toglie — a nostro parere — il fatto che questa scelta sia compiuta, almeno in parte, ad un livello che vorremmo chiamare provvisoriamente «prerazionale».
Se ritorniamo a considerare la Geometria da questo punto di vista, possiamo domandarci dunque quale sia il procedimento di astrazione che viene adottato quando si fa della Geometria.
A nostro parere, si potrebbe dire che la Geometria classica, e poi quella che è stata coltivata nei secoli successivi, almeno fino al nostro, astrae implicitamente dalla posizione di una figura, e quindi, parlando con linguaggio kleiniano, ammette come invarianti delle figure quelli che nascono dal gruppo del trasporto rigido.
Ci pare che queste osservazioni possano additare un primo segmento del cammino che vorremmo percorrere: infatti, dal punto di vista didattico, pensiamo che sia bene far acquisire una coscienza esplicita delle ipotesi che la Geometria classica, ma anche noi nell'insegnamento elementare, ammettiamo implicitamente come valide. Perché le manipolazioni, che noi ammettiamo di poter eseguire sulle figure, presuppongono come acquisito implicitamente oppure come intuitivo il concetto di corpo rigido. Ciò appare evidente quando avviciniamo un oggetto, oppure lo manipoliamo, gli cambiamo posizione per poter misurare le lunghezze dei segmenti e le ampiezze degli angoli.
Oppure, quando l'oggetto è troppo grande (sia una torre, un serbatoio, un gassometro...) per poter così lavorare su di esso, gli giriamo attorno per poter prendere conoscenza della sua forma e delle sue dimensioni. In ogni caso, noi presupponiamo tacitamente che le cose che vogliamo conoscere non dipendano dalla nostra condotta; facciamo astrazione da certe circostanze, pure reali e forse degne di considerazione per altre scienze: per esempio è chiaro che la Torre di Pisa, se considerata come un oggetto geometrico è un solido formato da due cilindri sovrapposti: ma dal punto di vista della fisica e della geologia, la sua posizione, la sua composizione materiale, il suo peso hanno una importanza grandissima, che invece per la Geometria non posseggono.
Ciò che abbiamo detto finora tende a far vedere che la astrazione della Geometria ha un determinato carattere, che è fondato sulla presenza di un gruppo di trasformazioni che individua il complesso degli invarianti che caratterizzano ogni singola Geometria. Se ora prescindiamo dal gruppo dei movimenti rigidi ed invece passiamo al gruppo delle trasformazioni lineari o proiettive che dir si voglia, l'insieme degli invarianti che vengono presi in considerazione cambia e quindi cambia l'atteggiamento del geometra di fronte alle figure: potremmo dire che cambia l'insieme delle cose da cui il geometra fa astrazione. Infatti, come abbiamo visto, nel caso della Geometria si tratta soltanto della posizione, della grandezza delle figure: qui si tratta di un insieme di proprietà che non stiamo a ripetere, ma che comunque sono invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni.
Riassumendo quello che vorremmo dire, possiamo esprimerci dicendo che il concetto algebrico di struttura gruppale, ed in particolare quello di gruppo di trasformazioni ha permesso di precisare e rendere rigorosa la considerazione della operazione di astrazione su cui si basa la necessaria generalizzazione della scienza.

Agostino Cauchy (1789-1857). Incisione di Bailly.

Giovanni-Vittorio Poncelet (1788-1867).



Una nuova visione di oggetti classici: le coniche, definite in origine come sezioni del cono rotondo, vengono considerate come proiezioni della circonferenza. Ne scaturisce la scoperta di nuove proprietà delle vecchie curve, proprietà definite in base agli invarianti per proiezione.



La classificazione delle possibili pavimentazioni regolari del piano scaturisce dalla analisi dei possibili gruppi dei movimenti rigidi del piano in sè. Analoga classificazione viene fatta a proposito dei gruppi cristallografici dello spazio.

Gruppi di trasformazioni e classi di equivalenza

Ciò che abbiamo cercato di esporre fin qui parlando di invarianti delle figure rispetto ad un gruppo di trasformazioni, potrebbe essere presentato con altre parole, ma in forma equivalente, parlando delle classi di equivalenza delle figure generate da un gruppo di trasformazioni.
In questo ordine di idee la fecondità del pensiero di Klein si manifesta nel fatto che egli non soltanto ha reso esplicita quella operazione di astrazione che è implicita in ogni conoscenza scientifica del reale, ed in particolare nelle conoscenze della Geometria, ma ha esplicitato questa presa di coscienza mediante la struttura algebrica di gruppo, che — come vedremo subito — fonda e giustifica la costruzione delle classi di equivalenza sulle quali lavora il geometra.
Queste nostre affermazioni possono essere presentate formalmente con gli sviluppi che seguono.
Sia Gr un gruppo, ed indichiamo i suoi elementi con lettere maiuscole dell'alfabeto latino:

(1) $$A, B, C, \ldots;$$

indicheremo l'operazione di composizione interna nel gruppo Gr semplicemente scrivendo uno accanto all'altro i simboli dei due elementi che si compongono: così scriveremo per esempio:

(2) $$C = AB$$

per indicare che l'elemento C di Gr è ottenuto con l'operazione di composizione dei due elementi A e B, nell'ordine scritto. Indicheremo poi con E l'elemento neutro del gruppo rispetto alla operazione di composizione; si avrà quindi

(3) $$AE = EA = A$$

qualunque sia l'elemento A; indicheremo infine con il simbolo

(4) $$A^*$$

l'elemento inverso dell'elemento A, rispetto all'operazione di composizione; si avrà quindi

(5) $$(A^*)A = A(A^*) = E.$$

Consideriamo ora un insieme $\mathcal{S}$ ed indichiamo con lettere minuscole dell'alfabeto latino dei suoi elementi:

(6) $$x, y, z, u, \ldots \in \mathcal{S}.$$

Supponiamo che gli elementi di Gr siano delle operazioni, che hanno come dominio l'insieme $\mathcal{S}$, e trasformano elementi di $\mathcal{S}$ in elementi di $\mathcal{S}$ stesso; indicheremo il fatto che all'elemento x di $\mathcal{S}$ è stata applicata l'operazione A di Gr semplicemente scrivendo il simbolo A dopo il simbolo di x; così per esempio la scrittura:

(7) $$y = xA$$

indicherà che l'elemento y di $\mathcal{S}$ è stato ottenuto applicando all'elemento x, pure di $\mathcal{S}$, l'operazione A.
Supporremo che l'elemento neutro di Gr sia l'operazione identica su $\mathcal{S}$, che si abbia cioè

(8) $$xE = x$$

quale che sia l'elemento x di $\mathcal{S}$; infine definiremo nel solito modo la composizione di due operazioni di Gr, ponendo

(9) $$x(AB) = (xA)B$$

Richiameremo tutto ciò che abbiamo detto finora dicendo brevemente che Gr è un gruppo di trasformazioni di $\mathcal{S}$ su se stesso.
A titolo di esempio, e per fissare le idee e le immagini, possiamo pensare che $\mathcal{S}$ sia l'insieme dei segmenti di un dato piano e che Gr sia il gruppo dei movimenti rigidi (traslazioni e rotazioni) del piano su se stesso.
Il caso per noi più interessante è quello in cui un elemento qualunque di $\mathcal{S}$ non possa essere portato in un altro elemento pure qualunque di $\mathcal{S}$ stesso mediante una operazione di Gr; in altre parole, il caso in cui, dati due elementi x, y, $\in \mathcal{S}$ non sempre esista una operazione A di Gr tale che valga la (7). Noi supporremo, qui e nel seguito, che questa ipotesi sia soddisfatta in tutti i casi che prenderemo in considerazione, senza che vi sia bisogno di farne esplicito cenno.
In questa ipotesi, il gruppo di trasformazioni Gr permette di costruire una partizione dell'insieme $\mathcal{S}$, cioè permette di costruire un insieme, che verrà indicato con il simbolo:

(10) $$\mathcal{S}' = \mathcal{S}/Gr$$

ed indicato come «l'insieme quoziente di $\mathcal{S}$ rispetto al gruppo Gr»; gli elementi dell'insieme $\mathcal{S}'$ sono i sottoinsiemi di $\mathcal{S}$, ognuno dei quali contiene, insieme con un elemento x *tutti* i suoi trasformati mediante tutte le operazioni di Gr.
Si verifica facilmente che gli elementi dell'insieme quoziente $\mathcal{S}'$ costituiscono una partizione di $\mathcal{S}$, cioè soddisfano alle condizioni che caratterizzano una partizione, condizioni che sono abitualmente enunciate nella forma seguente:
i) ogni sottoinsieme contiene almeno un elemento;
ii) ogni elemento di $\mathcal{S}$ appartiene almeno ad un sottoinsieme della partizione;
iii) due sottoinsiemi della partizione non hanno elementi comuni.
In questo caso è possibile definire nell'insieme $\mathcal{S}$ una relazione di equivalenza, definita dal gruppo Gr, chiamando equivalenti due elementi x, y, $\in \mathcal{S}$ se è possibile scrivere la (7), cioè se esiste una trasformazione di Gr che porta x in y.

Converremo di indicare con il simbolo:

(11) $$x \equiv_{Gr} y$$

la relazione tra due elementi x, y $\in \mathcal{S}$ quando sussiste la (7) per almeno un elemento A di Gr.
Nel seguito, quando non si possa dar luogo ad equivoci, scriveremo semplicemente

(11)bis $$x \equiv y$$

invece della (11).
Si verifica che la relazione così definita, e simbolizzata dalla (11), può legittimamente essere detta «di equivalenza» in quanto essa possiede le tre classiche proprietà, riflessiva, simmetrica e transitiva, che caratterizzano le relazioni che abitualmente vengono chiamate «di equivalenza». La verifica si ottiene in breve con i seguenti ragionamenti:
a) proprietà riflessiva:

(12) $$x \equiv x.$$

La validità di questa relazione consegue immediatamente dalla (8).
b) proprietà simmetrica:

(13) se è $x \equiv y$ allora è anche $y \equiv x$.

Infatti se vale la (7), è anche

(14) $$yA^* = (xA)A^* = x(A\,A^*) = xE = x;$$

e quindi, se esiste una trasformazione A $\in$ Gr tale che valga la (7), allora esiste anche un elemento $A^* \in$ Gr tale che sia

$$x = yA^*.$$

c) Infine si ha che

(15) se $x \equiv y$ ed anche $y \equiv z$, allora è anche $x \equiv z$.

Infatti, se esiste una trasformazione A $\in$ Gr, tale che sia

(16) $$y = x\,A$$

ed esiste una trasformazione B $\in$ Gr tale che sia

(17) $$z = y\,B$$

allora, dalla (16) si ha

(18) $z = yB = (xA)B = x(AB)$

in forza della (9).

Conseguenze didattiche

Nelle pagine precedenti abbiamo cercato di presentare il pensiero di Klein e soprattutto le implicazioni della sua impostazione; vorremmo ribadire qui che la portata delle idee del grande matematico tedesco non si limita alla Geometria, ma ha un significato che può essere esteso a tutte le procedure scientifiche le quali vogliano adottare la metodologia fisico-matematica.
In questo ordine di idee pensiamo che ben si addica alla Geometria l'appellativo di «primo capitolo della Fisica» che le era stato attribuito da F. Enriques; a nostro parere infatti la Geometria greca rappresenta il primo episodio di conoscenza scientifica della realtà del mondo, e gli «Elementi» di Euclide ci si presentano come il primo trattato veramente scientifico che la Storia ricordi. E vorremmo osservare che, a distanza di secoli e con diversi oggetti, i «Principia» di Newton hanno una impostazione metodologica che è strettamente analoga a quella degli «Elementi». Inoltre noi pensiamo che lo schema ideale di conoscenza scientifica, schema che è modellato sulla operazione di assiomatizzazione, consiste sostanzialmente nella presa di coscienza esplicita dei principi, che si danno come «evidenti» (tanto in Euclide che in Newton) e nella deduzione rigorosa delle conseguenze.
In questo ordine di idee si potrebbe dire che la differenza forse più importante tra Euclide e Newton consiste nel fatto che in Euclide la deduzione è affidata alla struttura sillogistica tradizionale, mentre in Newton sta maturando tutto un nuovo sistema di notazioni, di leggi sintattiche dei simboli e quindi di deduzione formale, che porterà alla Matematica di oggi.
Vorremmo chiudere queste brevi pagine di presentazione della visione kleiniana della Geometria con alcune considerazioni di carattere didattico.
Invero vorremmo dire che, in seguito a certe tendenze didattiche che fanno «moda», l'insegnamento della geometria, per ragioni che non intendiamo approfondire qui, pare non sia più molto di moda nelle nostre scuole. Abbiamo avuto occasione di osservare che nei programmi di insegnamento per periti informatici, programmi che comprendono capitoli molto elevati di Matematica, la parola «Geometria» non entra neppure una volta.
Si direbbe che noi viviamo ancora nella eredità di una certa visione della Matematica che era molto diffusa qualche decennio fa, e che ha anche fondato una certa linea didattica la quale — a nostro modesto parere — non ha dimostrato molta efficacia né validità. Intendiamo riferirci alla linea didattica che confondeva la semplicità concettuale con la facilità di apprendimento; in particolare quella linea didattica che è responsabile della alluvione della cosiddetta «insiemistica», che è stata propinata nelle scuole a tutti i livelli. Oggi si sente parlare con una certa frequenza del «fallimento dell'insiemistica»; cosa che era abbastanza prevedibile a priori, a chiunque non fosse tenacemente attaccato a certe idee preconcette.
A nostro parere infatti la confusione tra i due piani, didattico e concettuale, è spesso fonte di sviamenti nella strategia didattica, sviamenti che conducono ad un insegnamento troppo astratto e quindi ad un distacco dalla realtà; distacco che nei discenti si manifesta poi con un manifesto disamore e fastidio. Il risultato finale è poi quella concezione della Matematica come materia di puro «servizio» che trascura il valore formativo della materia.
In altre parole la Matematica viene considerata come la fornitrice di procedimenti e di formule, non giustificati gli uni e non fondate le altre; si direbbe che la situazione ideale alla quale un certo insegnamento tende sia quella dell'utente di un calcolatore elettronico, che compra i programmi già fatti e li mette in macchina, senza rendersi conto del loro fondamento e della ragione del loro funzionare.
Da parte nostra riteniamo che questi atteggiamenti siano ben poco formativi, e che di conseguenza la Matematica ed il suo insegnamento siano destinati ad essere sempre più deprezzati e meno capiti.
Occorre quindi trovare un punto di equilibrio tra la necessità di dare ai discenti degli strumenti potenti ed efficaci e quella di condurre i discenti alla formazione scientifica di base. Formazione che non consiste soltanto nella capacità di utilizzare degli strumenti, di seguire delle istruzioni, di ripetere degli esperimenti, ma soprattutto consiste nella analisi dei «perché» profondi della realtà che ci si presenta e che deve essere conosciuta nei suoi fondamenti e nelle sue ragioni. Infatti noi pensiamo che la conoscenza scientifica sia tale perché ricerca le ragioni, le cause della realtà; ragioni e cause che fondano la nostra capacità di leggere dentro le cose.
In questo ordine di idee noi pensiamo che la Geometria abbia un posto non sostituibile nella formazione scientifica dei giovani; e questa nostra convinzione è basata su due ragioni: anzitutto il fatto di cui abbiamo già detto, che la deduzione in Geometria, almeno nella sua visione classica, non è necessariamente affidata agli sviluppi dell'Algebra, ma può essere svolta con gli strumenti classici della logica verbale. Questa nostra convinzione potrà stupire o addirittura scandalizzare qualche collega matematico, che vede negli sviluppi algebrici uno dei momenti fondamentali e qualificanti della Matematica; ma noi ci sentiamo di sostenerla, perché intendiamo mettere in evidenza la differenza tra la capacità ideativa e deduttiva e la pura e semplice capacità di manipolazione dei simboli algebrici; capacità che spesso potrebbe essere accostata non alla intelligenza autentica, ma semplicemente alla abilità di assimilazione all'addestramento di certi comportamenti.
Capacità che, pur notevole, noi vorremmo distinguere dalla intelligenza, anche se essa è difficilmente separabile da quella.
Inoltre noi pensiamo che il dimenticare la Geometria nella didattica della Matematica e quindi nella formazione dei giovani possa anche portare come conseguenza il trascurare una delle capacità importanti dell'uomo, cioè la fantasia, la immaginazione spaziale, la intuizione dei rapporti di posizione e di situazione, intuizione che fa intravedere la verità prima che la deduzione rigorosa la accerti in modo incontrovertibile.
Non intendiamo con questo negare la necessità della deduzione rigorosa, né diminuire la stima per il progresso che è stato apportato dagli sviluppi del formalismo algebrico. Intendiamo soltanto presentare l'utilità di un certo equilibrio nell'insegnamento della Matematica; equilibrio che dovrebbe mirare ad utilizzare tutte le possibilità della mente umana, senza trascurarne nessuna; il che significherà lavorare per il bene dei nostri figli e della comunità in cui viviamo **(Carlo Felice Manara).**

Quale «teoria della misura» nella scuola media inferiore? / 2

La misura di grandezze omogenee

Proponiamo, in questa sede, un contributo riguardante la misura di grandezze omogenee, come specificazione della teoria generale della misura apparsa sul n. 3.

Angela Pesci

Ciò che segue costituisce il riferimento teorico a quanto si è soliti eseguire nella pratica fisica per attribuire in molti casi una misura: ci riferiamo non solo al caso delle grandezze geometriche (lunghezze, aree, volumi, angoli) ma anche a quello di molte altre grandezze come ad esempio tempi, masse, pesi, quantità di calore, cariche elettriche, ecc.
In tutte queste situazioni la costruzione di una misura avviene attraverso il concetto di rapporto fra grandezze omogenee.
Preciseremo anzitutto che cosa si intende per classe di grandezze omogenee; successivamente sarà definito il rapporto tra grandezze omogenee; tale rapporto, infine, sarà utilizzato per arrivare alla misura delle grandezze.

Grandezze omogenee

Prima di elencare le proprietà di un insieme (o classe) di grandezze omogenee incominciamo ad esaminare una situazione familiare: le lunghezze dei segmenti del piano.
È noto che la relazione di congruenza tra segmenti è una relazione di *equivalenza*, cioè è:
riflessiva: ogni segmento è congruente a se stesso;
simmetrica: se un segmento AB è congruente a un segmento CD anche CD è congruente ad AB;
transitiva: se un segmento AB è congruente a un segmento CD e CD è congruente ad un segmento EF allora AB è congruente ad EF.
L'esistenza di una relazione di equivalenza consente di suddividere l'insieme S di tutti i segmenti del piano in classi di equivalenza, ciascuna costituita da elementi equivalenti fra loro, cioè da segmenti tutti fra loro congruenti. Queste classi[1] vengono chiamate

[1] Se S è l'insieme dei segmenti del piano e la relazione di congruenza si indica con $\cong$ le classi di equivalenza ottenute costituiscono una partizione di S e sono elementi di un nuovo insieme che si dice insieme quoziente e si indica con $S/\cong$: nel seguito, per comodità, tale insieme quoziente sarà indicato con L (Lunghezze).